SOLUCION PERTURBATIVA AL PROBLEMA DE LA BACK REACTION PARA ESPACIO-TIEMPOS ESTATICOS

PERTURBATIVE SOLUTION TO THE BACK REACTION PROBLEM IN STATIC SPACE TIMES

C.O. Lousto[1], M.A. Castagnino[1,2] y N.G. Sánchez[3]

1: Instituto de Astronomía y Física del Espacio, Argentina, CONICET

2: Instituto de Física de Rosario, Argentina

3: Observatoire de París, Francia

RESUMEN: Se proyectan las ecuaciones de Einstein sobre una 3-superficie tipo espacial, considerando explícitamente que tomamos un espacio-tiempo estático. Luego, dentro de esta 3-superficie, hacemos una nueva proyección para expresar las ecuaciones de Einstein en términos de la curvatura bidimensional. El sistema de ecuaciones así planteado es equivalente a las ecuaciones de Einstein en 4 dimensiones. Buscando una solución a las mismas, se supone que el problema tiene simetría esférica. En este caso se logran desacoplar las ecuaciones y se halla una ecuación integral que puede ser iterada para hallar la solución perturbativa al problema. Como primer ejemplo de aplicación de este método, estudiaremos el efecto de back reaction producido por la creación cuántica de partículas sobre la métrica de Schwarzschild. Así se utilizan los $\langle T_\mu^\nu \rangle$ de la literatura, hallados recientemente, para resolver las ecuaciones semiclásicas de Einstein, i.e.

$$R_{\mu}^{\nu} - 1/2R\,\delta_{\mu}^{\nu} = \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle^{ren}$$

Se hallaron expresiones analíticas para los coeficientes de la métrica corregida a un "loop" para el $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle$ en el vacío de Hartle-Hawking-Israel, para un campo escalar no masivo. Utilizando estos resultados se puede estimar la corrección a la emisión de Hawking en el régimen cuasi-estático. Hallándose para la temperatura de emisión:

$$T = (8\pi M)^{-1} \left| 1+(M_p/M)^2/36\pi \right| ,$$

donde $M_p = (\hbar G/c^3)^{1/2}$. Con esta temperatura y la corrección al área del horizonte, se hallan los nuevos valores de la cantidad de energía emitida y del tiempo de vida del agujero negro.

ABSTRACT: We project the Einstein eqs. on an spacelike 3-surface, taking into account explicity that we shall restict ourselves to static space-times. Then, on this surface, we project again to express the Einstein eqs. in terms of the bidimensional extrinsic curvature. The set of eqs. so stated is equivalent to the 4-dimensional Einstein eqs. Looking for a solution to this eqs. it is supposed that the system has spherical symmetry. In this case we can uncouple the set of eqs. and we find integral eqs. that can be iterated to find the perturbative solution to the problem. As a first example of application of our method, we will study the back reaction effect produced by the quantum creation of particles on the Schwarzschild geometry. We shall use $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle$ from the literature, found a few years ago, to solve the semiclassical Einstein eqs. i.e.

$$R_{\mu}^{\nu} - 1/2R\,\delta_{\mu}^{\nu} = \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle^{ren} .$$

We found analitic expressions for the metric coefficients corrected up to one loop for the $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle$ in the

Hartle-Hawking-Israel vacuum for a free massless scalar field. Using these results we can estimate the correction to the Hawking emission in the quasi-static regime. We found for the emission temperature

$$T = (8\pi M)^{-1} \left| 1+(M_p/M)^2/36\pi \right| ,$$

where $M_p = (\hbar G/c^3)^{1/2}$.

With this temperature and the correction to the horizon area we find the new values of the emited energy and lifetime of the black holes.

1. INTRODUCCION

El problema de "back reaction" consiste en resolver consistentemente las ecuaciones semiclásicas de Einstein:

$$R_\mu^\nu - 1/2R\,\delta_\mu^\nu = \langle T_\mu^\nu \rangle^{ren} , \qquad (1)$$

donde la métrica $g_{\mu\nu}$ se toma como un background clásico y la ecuación para el campo cuántico en el espacio-tiempo correspondiente (i.e. para el campo escalar libre):

$$(\quad + m^2 + \xi R)\,\phi = 0 , \qquad (2)$$

que es la generalización de la ecuación de Klein-Gordon para espacio-tiempo curvos.

Este es un sistema de ecuaciones acopladas para $g_{\mu\nu}$ y Φ, pues en (2) aparece $g_{\mu\nu}$ a través de R y en (1) aparece Φ al calcular el $\langle T_\mu^\nu \rangle$ renormalizado.

Nosotros estamos principalmente interesados en estudiar el efecto que produce sobre la geometría de fondo (i.e. Schwarzschild) la radiación de Hawking emitida por un agujero negro. Para ésto se procederá perturbativamente con un formalismo que describiremos brevemente en la sección 3 y que será publicado en mayor detalle próximamente[1].

En 1974, S.W. Hawking [2,3] descubrió que los agujeros negros en el vacío no son tan negros, ya que pueden radiar partículas por efectos cuánticos con un espectro de cuerpo negro y una temperatura inversamente proporcional a su masa. Este fenómeno, de carácter totalmente distinto al de acreción estudiado anteriormente [4,5,6], puede entenderse como una analogía al correspondiente de creación de pares (partícula-antipartícula) por un campo electromagnético suficientemente intenso. El agujero negro crearía un par cerca del horizonte de eventos. Eventualmente una antipartícula podría caer dentro del agujero negro y la partícula escapar al infinito. Como la antipartícula puede pensarse como una partícula viajando hacia atrás en el tiempo, todo el proceso es equivalente a una partícula que escaparía del agujero negro hacia el infinito luego de sufrir un scattering en el lugar donde se creó el par. Esto puede pensarse como un efecto túnel. Cuánticamente, la partícula puede escapar a una barrera de potencial de la cual, clásicamente, no podría hacerlo.

El trabajo de Hawking fue una solución de orden cero al sistema de ecuaciones (1) y (2). Supuso pequeñas contribuciones cuánticas al $\langle T_\mu^\nu \rangle^{ren}$ para hallar una solución de vacío a (1):

$$R_\mu^\nu - 1/2R\delta_\mu^\nu = 0 \tag{3}$$

con $\Lambda = 0$. Para simetría esférica esta solución será la de Schwarzschild.

Luego para campos no masivos $(m = 0)$ la ecuación (2) quedará:

$$\Box\Phi = 0 \tag{4}$$

pues $R = 0$ para la solución de Schwarzschild.

La base de soluciones de esta ecuación (U_ω) U (U_ω^*), define operadores de creación y destrucción a_ω^+ y a_ω y con ellos tenemos la definición de un vacío $|0\rangle$:

$$a_\omega |0\rangle = 0 \qquad (5)$$

Luego un observador en el infinito verá un espectro de partículas dado por [7]:

$$\langle 0|\ a_\omega a_\omega^+ |0\rangle = (\exp(\omega/T) - 1)^{-1} \qquad (6)$$

donde $$T = 2\pi k(0) \qquad (7)$$

es la temperatura y $K(0)$ es la gravedad superficial del agujero negro.

Nosotros consideramos el $\langle T_\mu^\nu\rangle^{ren}$ de esta radiación para poner en el segundo miembro de (1) y luego resolveremos para la métrica y hallaremos las correcciones a la temperatura de Hawking a través de (7).

2. ECUACIONES DE EINSTEIN

Se descomponen las ecuaciones de Einstein en un formalismo (1+1+2) para el caso de espacio-tiempos estáticos [8]. Estos se pueden representar por la métrica:

$$ds^2 = - V^2 dt^2 + \rho^2(V) dV^2 + h_{ij} d\theta^i d\theta^j \qquad (8)$$

Las ecuaciones de Einstein quedarán:

$$V^{-1}\rho^{-1}\ (K - \rho^{-2}\partial\rho / \partial V) = - T_0^0 + T/2 - \Lambda \qquad (9)$$

$$\partial_i \rho = V\rho^2 (\partial_i K - K_{i|j}^j + T_{Vi}/\rho) \qquad (10)$$

$$1/2(K^{ml}K_{ml} - K^2 - 2K/(\rho V))\delta_i^{\ j} + \rho^{-1}\rho_{|i}^{\ \ j} + \rho^{-1}\partial K_i^j/\partial V + V^{-1}\rho^{-1}K_i^{\ j} =$$

$$= T\delta_i^j /2 - T_i^j - T_V^V \delta_i^j \qquad (11)$$

con $T = T^\mu_{\ \mu}$ y

$$K_{ij} = 1/2\rho\partial g_{ij}/\partial V \qquad (12)$$

y $$K = h^{ij} K_{ij} \qquad (13)$$

3. SOLUCION PERTURBATIVA

Para el caso de simetría esférica:

$$ds^2 = -\Omega^2 dt^2 + k^{-2}(\Omega)d\Omega^2 + h(\Omega)(d\theta^2 + sen^2(\theta)d\phi^2) \qquad (14)$$

Las ecuaciones de Einstein no triviales son:

$$k/\Omega(K+k') = T/2 - T^o_o - \Lambda \qquad (15)$$

$$K^2/2 - kK/\Omega + kK' = T^o_o - T^v_v \qquad (16)$$

ahora, haciendo el cambio de variables:

$$f(\Omega) = k(\Omega) - MK^2(\Omega)/(4\Omega^2) \qquad (17)$$

estas ecuaciones se desacoplan y se pueden resolver:

$$f(\Omega) = (K/\Omega)^2 \left[\int d\Omega H(\Omega)\Omega^2/K^2(\Omega) + Cte\right] \qquad (18)$$

con $$H(\Omega) = \Omega(T/2 - T^o_o - \Lambda)/k - 2(T^o_o - T^v_v)/K \qquad (19)$$

y $$K(\Omega) = \Omega\left|\int (L(\Omega)/\Omega - 2\Omega/M)d\Omega + Cte\right. \qquad (20)$$

con $$L(\Omega) = (2\Omega^2/MK)\left|2(T^o_o - T^o_o)/K - (K'/K - 1/\Omega)f\right| \qquad (21)$$

ecuaciones integrales que se pueden iterar para resolver totalmente.

4. $\langle T^\nu_\mu \rangle$ EN EL VACIO DE HARTLE-HAWKING-ISRAEL

Este $\langle T^\nu_\mu \rangle$ describe un agujero negro en equilibrio térmico con radiación. Puede pensarse el agujero negro emitiendo radiación a una temperatura T, pero recibiendo la misma cantidad de radiación de una cavidad reflectante que lo envuelve.

Para los cálculos tomaremos el $\langle T^\nu_\mu \rangle$ de Page[9] de un campo escalar libre no masivo. Luego de reemplazar esto dentro del mecanismo de la sección anterior, obtendremos expresiones analíticas para los coeficientes de la métrica:

$$f(\Omega) = 2M\varepsilon(1-\Omega^2)\,\Big|\,3(1-u)^{3}-24u^2+83u+u^{-2}+5/u+u^{-2}(1-u)^{-3}$$

$$+2(1-u)^{-2}(5-2u-2u^2)-2u^{-2}(1-u)(1+5u)-24\ln(1-u)\,\Big|_{u_0=r_0^2}^{u=r^2}$$

$$+f_- \qquad (22)$$

$$K(\Omega) = \Omega\,|1-\Omega^2|_{r_0}^{r}/M+8M\,\varepsilon\Omega\,\Big|2u^{-2}(1-u)^2-u/(1-u)+2(1-u)^{-2}$$

$$+4/(1-u)+1/u+56-49u-36\ln(1-u)+24u\ln(1-u)+$$

$$+9/2(1-u)^4-13u^3+123u^2/2-u^{-2}/2\,\Big|_{r_0^2}^{r^2}+K_- \qquad (23)$$

con $\varepsilon = \hbar G/c^3(90.8^3.\,\pi.M^4)^{-1}$ y donde Ω_0 es el "radio" de la cavidad reflectante en la que se mantiene el agujero negro en equilibrio térmico. f_- y K_- se pueden poner en función de parámetros dependientes del stress de la cavidad:

$$K_- = \Omega_0\,(1-\Omega_0^2)/M-\gamma \qquad (24)$$

$$f_- = (M\gamma/4\,\Omega_0^2)\,(2\,\Omega(1-\Omega_0^2)/M-\gamma) \qquad (25)$$

con

$$\gamma = \lim_{\Delta\to 0}\int_{-\Delta}^{\Delta} d\Omega\, T_{00}(1-\Omega^2)/4M \qquad (26)$$

5. EVAPORACION DE AGUJEROS NEGROS

Desde el descubrimiento de Hawking en 1984 de que los agujeros negros radían en el espacio-tiempo de Schwarzschild (solución de vacío de las ecuaciones de Einstein), ha sido muy interesante calcular el efecto de esta radiación sobre la geometría. Si bien nosotros estudiamos el caso está tico, podemos extender los resultados obtenidos con el $\langle T_\mu^{\ \nu} \rangle$ en el vacío de Hartle-Hawking-Israel, considerándolos en el límite cuasiestático del caso dependiente del tiempo, i.e. el $\langle T_\mu^\nu \rangle$ en el vacío de Unruh. Es más, si se tiene en cuenta que los $\langle \Phi^2(x) \rangle^{ren}$ en los vacíos de Hartle-Hawking-Israel y Unruh, coinciden en el horizonte(10) (donde se crean la inmensa mayoría de las partículas emitidas), pueden obtenerse resultados bastante confiables.

La temperatura del agujero negro se obtiene de la gravedad superficial:

$$T = k(0)/2\pi \quad (\Omega=0 \text{ en el horizonte}) \tag{27}$$

luego: $$T_{BR} = T_H(1+\alpha(M_p/M)^2) \tag{28}$$

con $M_p = (G\hbar/c^3)^{1/2} = 10^{-5}$gr. y $\alpha = 1/36\,\pi$.

Vemos que como $\alpha>0$ tendremos una temperatura mayor a la prevista sin back reaction, por lo tanto es de suponer que tendremos una mayor emisión y un menor tiempo de vida del agujero negro, a pesar del decrecimiento del área del horizonte. Los siguientes cálculos confirmarán estas suposiciones.

El "radio" del horizonte también se modificará por la back reaction:

$$r_H = 2M(1-\beta/2(M_p/M)^2) \tag{29}$$

con $\beta = 17/960\,\pi > 0$ tendremos un decrecimiento en el tamaño del horizonte. Mientras que la energía total emitida será:

$$-dMc^2/dt = 4\pi r_h^2 \sigma T^4 \tag{30}$$

o sea: $$dM/dT\,|_{BR} = dM/dt_{\ H}\ (1+(4\alpha-\beta)(M_p/M)^2) \tag{31}$$

Como $4\alpha- >0$ vemos que la emisión total corregida por back reaction es mayor a la sin corregir debido a que el decrecimiento en el área del horizonte no alcanza a compensar el aumento en la temperatura.

Finalmente, integrando la fórmula para la pérdida de energía, hallamos el tiempo de vida del agujero negro:

$$BR = H^{(1-3(4\alpha-\beta)(M_p/M)^2)} \qquad (32)$$

Vemos que el tiempo de vida del agujero negro disminuye por el efecto de "back reaction".

6. CONCLUSIONES

Hemos desarrollado un método para trabajar iterativamente el problema de la back reaction. Como un primer ejemplo de lo poderoso de este formalismo hemos resuelto este problema a un loop para el caso particular del espacio-tiempo de Schwarzschild con emisión de partículas escalares sin masa y obtuvimos las correcciones a la temperatura de emisión, así como al radio del horizonte de eventos. Esto nos permitió hallar una mayor emisión a la prevista por Hawking (ver ec. (31)) y un menor tiempo de vida del agujero negro (ver ec. (32)). De esta ecuación vemos que el tiempo de vida cae a cero para $M<0.3M_p$, hecho que puede significar que la back reaction inhibe la formación de agujeros negros en masas menores a $0.3M_p$. Pero este valor depende de la validez de nuestra aproximación a un loop. Trataremos de dilucidar ésto en un próximo trabajo.

REFERENCIAS

1. Castagnino, M.N.; Loustó, C.O. y Sánchez, N.G. 1987, en preparación.
2. Hawking, S. 1974, Nature **248**, 80.
3. Hawking, S. 1975, Comm. Math. Phys. **43**, 199.
4. Loustó, C.O. Bol. Asoc. Arg. Astr. **31**, 272.

5. Loustó, C.O. 1986, Rev. Mex. Astr. Astrof. **13**, 75.
6. Loustó, C.O.; Vucetich, H. 1987, Proceedings of STLARG VI, World Sci. Publ. Co., Singapore, ed. M. Novello.
7. Birrell, N. y Davies, P. 1982, "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge Univ. Press, Cambridge.
8. Israel, W. 1967, Phys. Rev. **164**, 1776.
9. Page, D. 1982, Phys. Rev. D, **25**, 1499.
10. Candelas, P. 1980, Phys. Rev. D. **21**, 2185.